

Γραμμικό Υπόδειγμα: Απλή Παλινδρόμηση

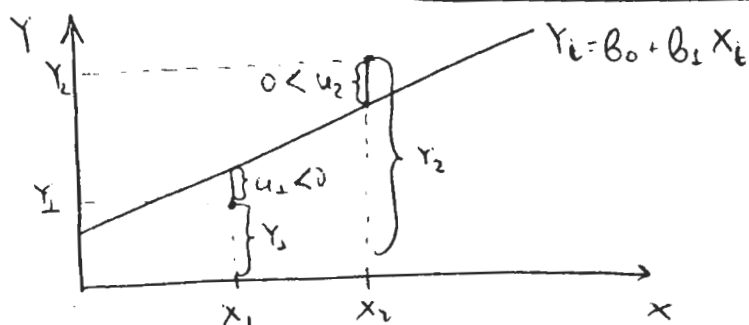
(1)

Προσδιοριστική σχέση

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

Στοχαστική σχέση

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \quad (1)$$



→ Υποθέσεις για τη συμπεριφορά της στοχαστικής μεταβλητής u_i

•) Η u είναι πραγματική στοχαστική μεταβλητή: παίρνει τιμές με κάποιο τρόπο

•) $E(u_i) = 0$. Η u_i παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές με ίσους όρους 0.

•) Ομοσκεδαστικότητα: $E(u_i^2) = \sigma^2$ Η διακύμανση της ελαττώμενης μεταβλητής u_i είναι παρόμοια για όλες τις τιμές της X_i . $E[(u_i - E(u_i))^2] \stackrel{E(u_i)=0}{=} E(u_i^2) = \sigma^2$

•) $E(u_i u_j) = 0$ για $i \neq j$ Οι διαταραχτικές όροι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι οπότε η συνδιακύμανση δύο τέτοιων όρων (διαφορετικών μεταβλητών) είναι 0 (Θεώρ. 1/Μοδ. 1)

$$\text{Cov}(u_i, u_j) = E\{(u_i - E(u_i))(u_j - E(u_j))\} \stackrel{E(u_i)=E(u_j)=0}{=} E(u_i u_j) = 0$$

⇒ Υποθέσεις για την ανεξάρτητη μεταβλητή

•) Η μεταβλητή X δεν είναι στοχαστική. Οι τιμές της λαμβάνουν παρόμοιες και δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους. Δηλαδή, αν η τιμή της X δεν μεταβάλλεται από δείγμα σε δείγμα. Άρα η X δεν συχνοποιείται, ή αν διαταραχτικό όρο εισάγουμε

$$\text{Cov}(X, u_i) = 0 \Rightarrow E\{(X - E(X))(u_i - E(u_i))\} = 0 \stackrel{E(u_i)=0}{=} E(X u_i) = 0 \quad \begin{matrix} E(X) = X_j \text{ (αριθμός)} \\ E(u_i) = 0 \end{matrix}$$

2/

$$\Rightarrow E(X_j, u_i) - X_j \underbrace{E(u_i)}_0 = 0 \Rightarrow E(X_j, u_i) = 0$$

Η $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ είναι τυχαία φεωβήση.

Θεώρημα 1 $Y \sim (\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$

Ανσ

$$\begin{aligned} \bullet E(Y_i) &= E(\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i) = E(\beta_0) + \underbrace{E(\beta_1 X_i)}_{\text{σταθερό}} + E(u_i) = \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_i + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Var}(Y_i) &= E[Y_i - E(Y_i)]^2 = E\{(\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\} = \\ &= E(u_i^2) = \sigma^2 \end{aligned}$$

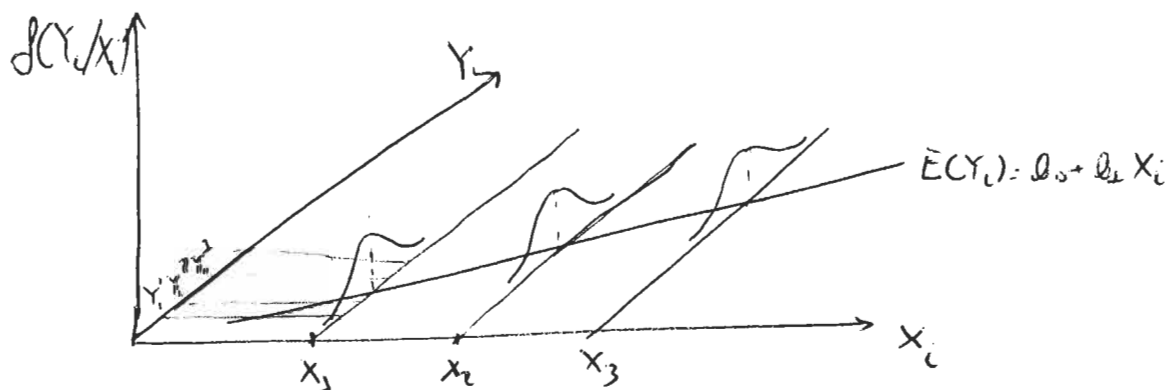
Θεώρημα 2 Οι τ.μ. Y_i, Y_j $i \neq j$ είναι ανεξάρτητες

Ανσ Αρκεί να δείξουμε ότι $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ (γιατί,)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= E\{(Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j))\} \stackrel{\text{Θ.1}}{=} E\{(Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i))(Y_j - (\beta_0 + \beta_1 X_j))\} \\ &\stackrel{\text{C1)}}{=} E(u_i, u_j) = 0 \end{aligned}$$

Γραφική αναπαράσταση των εννοιών: Η σχέση ανάρτησης μας παρέχει την ελπίδα φεωβήσης Y και τις αντίστοιχες τιμές της ανεξάρτητης φεωβήσης X :

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$



Οι $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ ανήκουν άγνωστες οντες τις εκτιμήσεις από κάποιο δείγμα παρατηρήσεων για τις μεταβλητές X και Y .
Εστω $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$ οι εκτιμήσεις των ανωτέρω α_0, α_1 .

Γραμμική παλινδρόμηση στο δείγμα:

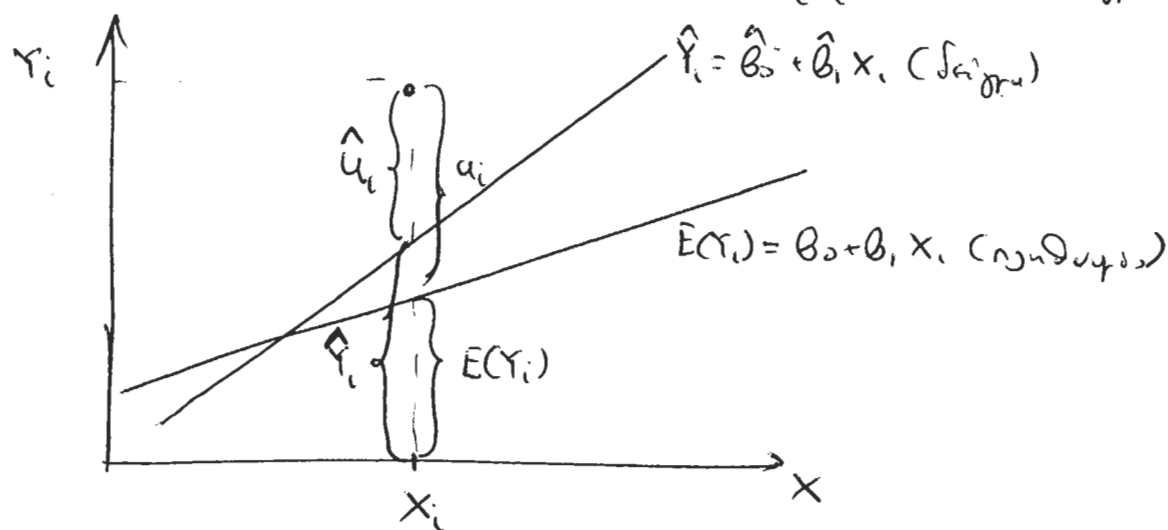
$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i \quad (2)$$

Η γραμμική παλινδρόμηση (2) δεν περνάει από όλα τα σημεία (Y_i, X_i) αφού οι υπολογιστές από $\hat{Y}_i$ δεν είναι όλοι ίσοι με τις πραγματικές τιμές Y_i .

Απόκλιση ή κενό (Residual): $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$

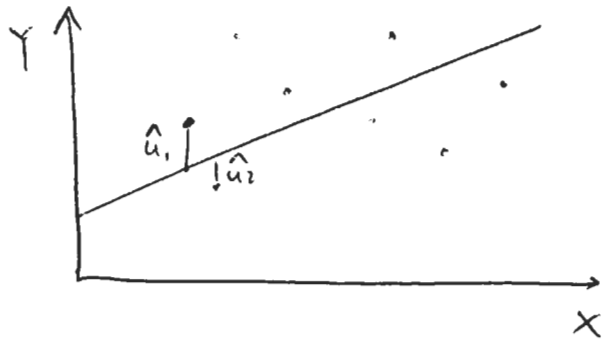
$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + u_i \quad (\text{συμπεριέχει τον ηθυσμό})$$

$$Y_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_i + \hat{u}_i \quad (\text{συμπεριέχει το δείγμα})$$



4)

Εκτίμηση των θ_0, θ_1 με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων



Οι εκτιμήσεις $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης:

$$Q = \hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + \dots + \hat{u}_N = \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i)^2$$

Υπολογισμοί:

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\theta}_0} = 0 \Rightarrow -2 \sum (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i) = -2 [\sum Y_i - N \cdot \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 \sum X_i] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum Y_i = N \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \sum X_i} \quad (A) \quad \parallel \text{ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\theta}_1} = 0 \Rightarrow -2 \sum (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i) \cdot X_i = -2 [\sum Y_i X_i - \hat{\theta}_0 \sum X_i - \hat{\theta}_1 \sum X_i^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum X_i Y_i = \hat{\theta}_0 \sum X_i + \hat{\theta}_1 \sum X_i^2} \quad (B) \quad \parallel \text{ΕΞΙΣΟΤΗΣΕΙΣ}$$

Η λύση των (A), (B) δίνει:

$$\hat{\theta}_0 = \frac{\sum X_i^2 \cdot \sum Y_i - \sum X_i \cdot \sum X_i Y_i}{N \cdot \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (3) \quad \hat{\theta}_1 = \frac{N \cdot \sum X_i Y_i - \sum X_i \cdot \sum Y_i}{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (4)$$

Αν (A) διαχωρίσουμε με N έχουμε:

$$\frac{\sum Y_i}{N} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \frac{\sum X_i}{N} \Rightarrow \boxed{\bar{Y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \bar{X}} \quad (5) \Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_0 = \bar{Y} - \hat{\theta}_1 \bar{X}} \quad (6)$$

$$\text{όπου } E(Y_i) = \bar{Y}, E(X_i) = \bar{X}$$

Η (6) χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το $\hat{\theta}_0$
Υπολογισμός του θ_1

Οπότε
$$S_{yy} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (Y_i^2 - 2Y_i\bar{Y} + \bar{Y}^2) =$$

$$= \sum Y_i^2 - 2\bar{Y} \sum Y_i + N\bar{Y}^2 =$$

$$= \sum Y_i^2 - 2\bar{Y} N \cdot \bar{Y} + N\bar{Y}^2 \Rightarrow \underline{S_{yy} = \sum Y_i^2 - N\bar{Y}^2} \quad (7)$$

$$\underline{S_{xy} = \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - N\bar{X}\bar{Y}} \quad (8)$$

$$\underline{S_{xx} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - N\bar{X}^2} \quad (9)$$

Η (8) γίνεται:

$$\sum X_i Y_i \stackrel{(6)}{=} (\bar{Y} - \hat{\theta}_1 \bar{X}) \sum X_i + \hat{\theta}_1 \sum X_i^2 =$$

$$= (\bar{Y} - \hat{\theta}_1 \bar{X}) N \cdot \bar{X} + \hat{\theta}_1 \sum X_i^2 =$$

$$= \hat{\theta}_1 (\sum X_i^2 - N\bar{X}^2) + N\bar{X}\bar{Y} \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}_1 (\sum X_i^2 - N\bar{X}^2) = \sum X_i Y_i - N\bar{X}\bar{Y} \stackrel{(8),(9)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\hat{\theta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}} \quad (10)$$

Εκφράζει τη φερεγγότητα των
 προσδοκώμενων επί της
 εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν
 η εξηγητική μεταβλητή X
 αυξάνει κατά μία μονάδα

Γιόρτζης, εν, Γραφής, Παλινδρόμησης και Διόρθωσης

1) Διόρθωση από το $(\bar{X}, \bar{Y})$

$\sum_{i=1}^n (5)$

$$2) \sum Y = \sum \hat{Y} \Rightarrow \bar{Y} = \bar{\hat{Y}} \quad \left(\frac{\sum Y}{N} = \frac{\sum \hat{Y}}{N} \right)$$

Αντί

$$\hat{Y}_i = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 X_i \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sum \hat{Y} &= N \cdot \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \sum X_i \\ \sum Y_i &= N \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \sum X_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum \hat{Y} = \sum Y_i$$

(A) $\Rightarrow$

3) $\sum \hat{u}_i = 0$

Ans

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i \Rightarrow \sum \hat{u}_i = \sum Y_i - \sum \hat{Y}_i \xrightarrow{2)} \sum \hat{u}_i = 0$$

4) $\sum X_i \hat{u}_i = 0$

Ans

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i \Rightarrow$$

$$\sum X_i \hat{u}_i = \sum X_i (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i) = \sum (X_i Y_i) - \hat{\theta}_0 \sum X_i - \hat{\theta}_1 \sum X_i^2 \xrightarrow{(B)} \sum X_i \hat{u}_i = 0$$

5) $\sum \hat{Y}_i \hat{u}_i = 0$

Ans

$$\sum \hat{Y}_i \hat{u}_i = \sum \hat{u}_i (\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 X_i) = \hat{\theta}_0 \sum \hat{u}_i + \hat{\theta}_1 \sum \hat{u}_i X_i \xrightarrow{1)} 0$$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε ότι οι σχέσεις $\sum \hat{u}_i = 0$ και $\sum X_i \hat{u}_i = 0$ αποτελούν τις δύο φορές των κανονικών εξισώσεων.

Απάντηση

Θέτουμε $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ οι σχέσεις γίνονται

$$\left. \begin{matrix} \sum \hat{u}_i = 0 \\ \sum X_i \hat{u}_i = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \sum (Y_i - \hat{Y}_i) = 0 \\ \sum X_i (Y_i - \hat{Y}_i) = 0 \end{matrix} \right\} \hat{Y}_i = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 X_i$$

$$\left. \begin{matrix} \sum (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i) = 0 \\ \sum X_i (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum Y_i = N \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \sum X_i \quad (A)$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{\theta}_0 \sum X_i + \hat{\theta}_1 \sum X_i^2 \quad (B)$$

Συντελεστής προσδιορισμού

7

Έχουμε το μοναδικό μοντέλο:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

Με εν σειρά παλινδρόμησης

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

προσπαθούμε να ερμηνεύουμε την μεταβλητικότητα της Y που οδηγείται από τις μεταβολές στην τιμή της X . Το ερώτημα είναι πόση μεταβλητικότητα της Y οδηγείται από την συνολική και πόση είναι ανεξήγητη, δηλαδή οφείλεται προς τυχαίους παράγοντες

$$\text{Μεταβλητικότητα της } Y = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 =$$

$$= \sum (Y_i - \hat{Y}_i + \hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum [(Y_i - \bar{Y}) + \hat{u}]^2 =$$

$$= \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum \hat{u}^2 + 2 \cdot \sum \hat{u}(\hat{Y}_i - \bar{Y}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum \hat{u}(\hat{Y}_i - \bar{Y}) &= \sum \hat{u} \hat{Y}_i - \bar{Y} \sum \hat{u} = 0 \quad \text{αφού} \\ \sum \hat{u} \hat{Y}_i &= 0 \quad \& \quad \sum \hat{u} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum \hat{u}^2 \Rightarrow TSS = ESS + RSS}$$

Συνολικό άθροισμα

εσφαλμάτων

Total Sum of Squares

TSS

Ερμηνεύσιμο

άθροισμα

εσφαλμάτων

Explained SS

ESS

Υπόλοιπο άθροισμα

εσφαλμάτων

Residual SS

RSS.

Ορίζω Συντελεστής προσδιορισμού $R^2_{xy} \equiv R^2$: Το ποσοστό της

μεταβλητικότητας της εξαρτημένης μεταβλητής Y που ερμηνεύεται από την συνολική.

$$\boxed{R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{TSS - RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum \hat{u}^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Σημείωση: $0 \leq R^2 \leq 1$. $R^2 = 0 \Rightarrow \sum \hat{u}^2 = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$

$$R^2 = 1 \Rightarrow \sum \hat{u}^2 = 0$$

8)

Ο Σ.Π αποτελεί ένα δείγμα του π.π. "Καρό" είναι το υποδράγμα που έχουμε επιλεγεί. Όσο μεγαλύτερη είναι η επιφ. του R^2 , τόσο καλύτερη είναι η προσέγγισή του υποδείγματος στα δεδομένα του δείγματος και αντίστροφα.

Άλλα ευρήματα του R^2

Ισχύει ότι $\sum (Y_i - \hat{Y})^2 = \hat{\theta}_1^2 S_{xx}$

$$\begin{aligned} \text{Αντ} \quad \sum (Y_i - \hat{Y})^2 &= \sum (\theta_0 + \hat{\theta}_1 x_i - \bar{Y})^2 \quad \underline{\underline{\hat{\theta}_0 = \bar{Y} - \hat{\theta}_1 \bar{x}}} \\ &= \sum [\bar{Y} - \hat{\theta}_1 \bar{x} + \hat{\theta}_1 x_i - \bar{Y}]^2 = \hat{\theta}_1^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 = \hat{\theta}_1^2 S_{xx} \end{aligned}$$

Ισχύει επίσης:

$$\hat{\theta}_1^2 S_{xx} = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \cdot S_{xx} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \cdot S_{xy} = \hat{\theta}_1 \cdot S_{xy}$$

Οπότε αν το οπ.γ. του R^2 έχουμε

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\sum (Y_i - \hat{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\hat{\theta}_1^2 \cdot S_{xx}}{S_{yy}} \\ &= \frac{\hat{\theta}_1 S_{xy}}{S_{yy}} \\ &= \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} \cdot S_{yy}} \end{aligned}$$

Συντελεστής συσχέτισης

Μέτρο του βαθμού συσχέτισης δύο εχθών φ.π.δ.π.

Ορίζεται

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

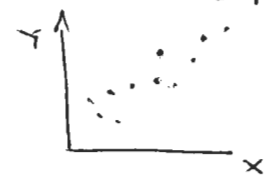
Ο r ευρετή του ρ χρησιμοποιείται τον συντελεστή συσχέτισης του δείγματος που ορίζεται ως:

$$r = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}} \sqrt{S_{yy}}} = \sqrt{R^2}$$

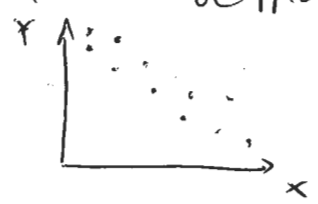
Σημείωση 1 Το r ευρετή του συντελεστή συσχέτισης (ρ) που προκύπτει από τις παρατηρήσεις X, Y θεωρείται ισχύει επί R^2 αναφέρεται στην αναλογία της μεταβλητότητας της Y που ερμηνεύει η μεταβλητή X η οποία υποδηλώνει ότι δεν είναι τυχαία μεταβλητή

2) $-1 \leq r \leq 1$

$r > 0$ X, Y θετική βαθμιαία συσχέτιση τυχαίες μεταβλητές



$r < 0$ X, Y αρνητική βαθμιαία συσχέτιση τυχαίες μεταβλητές



$r = 0$ X, Y μη βαθμιαία συσχέτιση τυχαίες μεταβλητές

ΑΣΚΗΣΗ 11 Ανίχνευση συσχέτισης

Έστω $\hat{Y}_i = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 X_i$ η γραμμική συσχέτιση της Y με την X .

Υπο ποια προϋπόθεση η γραμμική συσχέτιση της X με την Y

(η Y θεωρείται ανεξάρτητη και η X εξαρτημένη μεταβλητή)

δίνεται από την εξίσωση:

$$\hat{X}_i = \frac{1}{\hat{\theta}_1} Y_i - \frac{\hat{\theta}_0}{\hat{\theta}_1}$$

Ανίχνευση

Η σχέση συζυγισμένης των X και Y θα είναι ταυτοτική.

$$\hat{X}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Y_i \quad \text{όπου} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{yy}} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{X} - \hat{\beta}_1 \bar{Y}$$

Ενδεχόμενα ο αρχικός συντελεστής συζυγισμένης έχει:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \quad \text{με} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Γενικά δεν ισχύει $\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{\beta}_1}$ και $\hat{\beta}_0 = -\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}$

$$\text{Αν } \hat{\beta}_1 = \frac{1}{\hat{\beta}_1} \Rightarrow \hat{\beta}_1 \cdot \hat{\beta}_1 = 1 \Rightarrow \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} \cdot S_{yy}} = 1$$

Αν $R^2 = 1$ τότε οι δύο σχέσεις συζυγισμένης θα ταυτίζονται αφού

$$-\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1 \bar{X} - \bar{Y}}{\hat{\beta}_1} = \bar{X} - \frac{1}{\hat{\beta}_1} \bar{Y} = \bar{X} - \hat{\beta}_1 \bar{Y} = \hat{\beta}_0$$

Αν $R^2 \neq 1$ οι δύο σχέσεις συζυγισμένης θα είναι ωστόσο τινώνων άσυν.

Ιδιότητες των Εκτιμητών

Ορισμοί

• Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ μιας παραμέτρου θ των πληθυσμών είναι αφρόδυντος αν η προσδοκώμενη τιμή του είναι ίση με την παράμετρο $E\hat{\theta} = \theta$

• Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ λέγεται άριστος σχετικά με τον αφρόδυντο εκτιμητή της παραμέτρου θ αν:

1) ο $\hat{\theta}$ είναι γραμμική συνάρτηση των παρατηρήσεων του δείγματος δηλαδή είναι της μορφής $\sum a_i X_i$ όπου a_i σταθερές και X_i η i -παρατήρηση του δείγματος

2) ο $\hat{\theta}$ είναι αφρόδυντος

3) $\text{Var}(\hat{\theta}) < \text{Var}(\hat{\theta}^*)$ όπου $\hat{\theta}^*$ οποιοσδήποτε άλλος γραμμικός αφρόδυντος εκτιμητής

Θεώρημα Για τις εκτιμήσεις $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ που προκύπτουν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Είναι γραμμικές συντεχνίες των παρατηρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής Y

2) Είναι αμερόλητοι:

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

3) Μετά από όλη την γραμμική αμερόλη των εκτιμήσεων έχουν τη μικρότερη διακύμανση (Είναι δηλαδή άρτιας ευμενής) που δίνονται από τις σχέσεις

$$\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{N S_{xx}} = \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right) \quad \text{Var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}}$$

Επίσης η συνδιακύμανση των $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ είναι

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\sigma^2 \frac{\bar{x}}{S_{xx}}$$

4) Ενώ αμερόλητες, ευμενής της διακύμανσης σ^2 δίνεται από τις σχέσεις:

$$S^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N-2} = \frac{S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}}{N-2}$$

Ανάλυση

1) Έχουμε:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_{xx}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot y_i}{S_{xx}} - \frac{\bar{y} \sum (x_i - \bar{x})}{S_{xx}} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - N\bar{x} = 0 \\ \text{Η μεταβλητή } X \text{ δεν είναι ποσοτική οντότητα,} \\ \text{επί της παρατήρησης αυτών σε μια υποθέτηση} \\ \text{δυναμική επανεξέτασης διατηρείται} \\ \text{Αρα η πρώτη α} \end{array} \right. \quad \alpha_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_{xx}} \text{ είναι σταθερά}$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum a_i \cdot y_i \quad (\text{Γραμμική συνάρτηση})$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{\sum y_i}{N} - \bar{x} \sum a_i y_i \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} a_i \right) y_i \quad (\text{Γραμμική συνάρτηση})$$

12/ 2). Θ_0 δείχνει ότι $E(\hat{\theta}_1) = \theta_1$

$$\text{Έχουμε } \hat{\theta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{x}) Y_i}{S_{xx}} \quad Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_i + u_i \quad \frac{\sum (X_i - \bar{x}) (\theta_0 + \theta_1 X_i + u_i)}{S_{xx}} =$$

$$= \theta_0 \frac{\sum (X_i - \bar{x})}{S_{xx}} + \theta_1 \frac{\sum (X_i - \bar{x}) \cdot X_i}{S_{xx}} + \frac{\sum (X_i - \bar{x}) u_i}{S_{xx}} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum (X_i - \bar{x}) = 0 \\ \sum (X_i - \bar{x}) X_i = \sum X_i^2 - \bar{x} \sum X_i = \sum X_i^2 - N \bar{x}^2 = S_{xx} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\hat{\theta}_1 = \theta_1 + \frac{\sum (X_i - \bar{x}) u_i}{S_{xx}}}$$

Παίρνουμε την προσδοκώμενη τιμή οπότε έχουμε:

$$E(\hat{\theta}_1) = E\theta_1 + E\left(\frac{\sum (X_i - \bar{x}) u_i}{S_{xx}}\right) = \theta_1 + \frac{\sum (X_i - \bar{x}) E(u_i)}{S_{xx}} \stackrel{E(u_i)=0}{=} \theta_1$$

• Θ_0 δείχνει ότι $E(\hat{\theta}_0) = \theta_0$

$$\text{Έχουμε } \hat{\theta}_0 = \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i \right) Y_i \quad \text{τα} \quad \alpha_i = \frac{X_i - \bar{x}}{S_{xx}}$$

$$\text{Θέτουμε } Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_i + u_i \quad \text{οπότε}$$

$$\hat{\theta}_0 = \frac{1}{N} \theta_0 + \frac{\theta_1}{N} \sum X_i + \frac{\sum u_i}{N} - \theta_0 \bar{x} \sum \alpha_i - \theta_1 \bar{x} \sum \alpha_i X_i - \bar{x} \sum \alpha_i u_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \alpha_i = \frac{\sum (X_i - \bar{x})}{S_{xx}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \alpha_i X_i = \frac{\sum (X_i - \bar{x}) X_i}{S_{xx}} \stackrel{\text{παράτηρημα}}{\text{παρατήρημα}} \frac{S_{xx}}{S_{xx}} = 1 \end{array} \right.$$

$$= \theta_0 + \theta_1 \bar{x} + \frac{\sum u_i}{N} - \theta_1 \bar{x} - \bar{x} \sum \alpha_i u_i \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}_0 - \theta_0 = \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i \right) u_i \Rightarrow E(\hat{\theta}_0 - \theta_0) = \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i \right) \underbrace{E(u_i)}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$$E\hat{\theta}_0 = \theta_0$$

3) • Θ₁ Schätzgröße zu $\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}}$

ϵ_{xy} $\hat{\theta}_1 = \theta_1 + \sum a_i u_i$ mit $a_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_{xx}}$ mit u. i. d. F.

$$\text{Var}(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_1 - E\hat{\theta}_1)^2 = E(\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 = E(\sum a_i u_i)^2 =$$

$$= E\left[\sum a_i^2 u_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j u_i u_j\right] = \sum a_i^2 E(u_i^2) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j E(u_i u_j)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(u_i^2) = \sigma^2 \\ E(u_i u_j) = 0 \quad (i \neq j) \end{array} \right.$$

$$= \sigma^2 \sum a_i^2 = \sigma^2 \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}^2} = \sigma^2 \frac{S_{xx}}{S_{xx}^2} \Rightarrow \text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

• Θ₀ Schätzgröße zu $\text{Var}(\hat{\theta}_0) = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{N \cdot S_{xx}}$

$$\hat{\theta}_0 = \theta_0 + \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i\right) u_i \quad (\text{To Schätzgröße gehört})$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}_0) = E(\hat{\theta}_0 - E\hat{\theta}_0)^2 = E(\hat{\theta}_0 - \theta_0)^2 = E\left(\sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i\right) u_i\right)^2 =$$

$$= E\left(\sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i\right)^2 u_i^2\right) + 2 E\left(\sum_{i < j} \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i\right) \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_j\right) u_i u_j\right) =$$

$$= \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i\right)^2 E(u_i^2) + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i\right) \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_j\right) E(u_i u_j) \quad \begin{array}{l} E(u_i^2) = \sigma^2 \\ E(u_i u_j) = 0 \quad (i \neq j) \end{array}$$

$$= \sigma^2 \sum \left(\frac{1}{N} - \bar{x} \alpha_i\right)^2 = \sigma^2 \cdot \sum \left(\frac{1}{N^2} + \bar{x}^2 \alpha_i^2 - \frac{2}{N} \bar{x} \alpha_i\right) =$$

$$= \sigma^2 \cdot \left(\frac{N}{N^2} + \bar{x}^2 \sum \alpha_i^2 - \frac{2}{N} \bar{x} \sum \alpha_i\right) \quad \alpha_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_{xx}}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \bar{x}^2 \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}^2} - \frac{2}{N} \bar{x} \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{S_{xx}}\right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum (x_i - \bar{x})^2 = S_{xx} \\ \sum (x_i - \bar{x}) = 0 \end{array} \right.$$

$$= \boxed{\sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)} \quad \left\| \begin{array}{l} S_{xx} = \sum x_i^2 - N \bar{x}^2 \\ \sigma^2 \frac{S_{xx} + N \bar{x}^2}{N S_{xx}} = \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{N S_{xx}} \end{array} \right.$$

•) Δείξτε ότι $\text{Var}(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει άλλος σταθμισμένος και αμερόληπτος εκτιμητής του θ_1 που να έχει μικρότερη διακύμανση από τον $\hat{\theta}_1$. Γι' αυτό υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχει ένα τέτοιο εκτιμητής ο θ^* :

$$\theta^* = \sum w_i Y_i$$

$$E(\theta^*) = E\left[\sum w_i Y_i\right] = \sum w_i \bar{Y} = \sum w_i (\theta_0 + \theta_1 X_i) = \theta_0 \sum w_i + \theta_1 \sum w_i X_i$$

Αρα για να είναι αμερόληπος ο θ^* θα πρέπει

$$\underline{\sum w_i = 0} \quad \underline{\sum w_i X_i = 1} \quad (A)$$

Επίσης έχουμε

$$\text{Var}(\theta^*) = \text{Var}\left(\sum w_i Y_i\right) = \sum w_i^2 \text{Var}(Y_i) \quad \underline{\text{Var}(Y_i) = \sigma^2} \quad \sigma^2 \sum w_i^2 =$$

$$= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} + \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} \right)^2 =$$

$$= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} \right)^2 + \sigma^2 \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{S_{xx}^2} + 2\sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} \right) \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum (X_i - \bar{X})^2 = S_{xx} \\ & \sum \left(w_i - \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} \right) \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} = \frac{1}{S_{xx}} \left[\sum w_i (X_i - \bar{X}) - \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{S_{xx}} \right] \\ & = \frac{1}{S_{xx}} \left[\sum w_i (X_i - \bar{X}) - 1 \right] = \frac{1}{S_{xx}} \left[\sum w_i X_i - \bar{X} \sum w_i - 1 \right] \stackrel{(A)}{=} \\ & = \frac{1}{S_{xx}} [1 - 0 - 1] = 0 \end{aligned} \right.$$

$$= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{S_{xx}} = \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}} \right)^2 + \text{Var}(\hat{\theta}_1) \Rightarrow$$

$$\text{Var}(\theta^*) \geq \text{Var}(\hat{\theta}_1)$$

Αρα δεν υπάρχει σταθμισμένος αμερόληπτος εκτιμητής του θ_1 με μικρότερη διακύμανση από τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\theta}_1$.

•) θ_0 $\sum_{i=1}^n \delta_i y_i$ ou $\text{Cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) = -\sigma^2 \frac{\bar{X}}{S_{xx}}$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) &= E[(\hat{\theta}_0 - E\hat{\theta}_0)(\hat{\theta}_1 - E\hat{\theta}_1)] = \\ &= E[(\hat{\theta}_0 - \theta_0)(\hat{\theta}_1 - \theta_1)] =\end{aligned}$$

$$\bullet) \theta_0 = \frac{\sum y_i}{N} - \theta_1 \frac{\sum x_i}{N} - \frac{\sum u_i}{N} = \bar{Y} - \theta_1 \bar{X} - \bar{u}$$

O termo $\bar{u}$ em θ_0 representa a soma total, dada para cada observação i o termo u_i a ser considerado.

Agora

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_0 - \theta_0 &= \bar{Y} - \hat{\theta}_1 \bar{X} - \theta_0 = \bar{Y} - \hat{\theta}_1 \bar{X} - (\bar{Y} - \theta_1 \bar{X} - \bar{u}) = \\ &= -(\hat{\theta}_1 - \theta_1) \bar{X} + \bar{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= E\left[-(\hat{\theta}_1 - \theta_1) \bar{X} + \bar{u}\right] (\hat{\theta}_1 - \theta_1) = E\left[-(\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 \bar{X} + \bar{u}(\hat{\theta}_1 - \theta_1)\right] = \\ &= -\bar{X} \cdot E(\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + E[\bar{u}(\hat{\theta}_1 - \theta_1)]\end{aligned}$$

$$E[\bar{u}(\hat{\theta}_1 - \theta_1)] = 0 \text{ pois: } \hat{\theta}_1 = \theta_1 + \frac{\sum (x_i - \bar{x}) u_i}{S_{xx}} \text{ onde:}$$

$$E[\bar{u}(\hat{\theta}_1 - \theta_1)] = E\left[\bar{u} \frac{\sum (x_i - \bar{x}) u_i}{S_{xx}}\right] = E\left[\frac{\sum (x_i - \bar{x}) u_i \bar{u}}{S_{xx}}\right] =$$

$$= \frac{1}{S_{xx}} E\left[\sum (x_i - \bar{x}) u_i \left(\frac{u_1 + \dots + u_N}{N}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{S_{xx}} E\left[\frac{\sum (x_i - \bar{x}) u_i \cdot u_1 + \dots + \sum (x_i - \bar{x}) u_i^2 + \dots + \sum (x_i - \bar{x}) u_i u_N}{N}\right]$$

$$= \frac{1}{S_{xx}} \frac{\sum (x_i - \bar{x}) E u_i^2}{N} = \frac{1}{S_{xx}} \frac{\sigma^2 \sum (x_i - \bar{x})}{N} = 0$$

$$= -\bar{X} \cdot \text{Var}(\hat{\theta}_1) = -\bar{X} \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

6) 4) θ_0 διαφέρει ου $E(S^2) = \sigma^2$ ή $S^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N-2}$

Παρατήρηση: Αν $\hat{\beta}_1$ είναι $R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 S_{xy}}{S_y} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_i^2}{S_y}$ οπότε

$\sum \hat{u}_i^2 = S_y - \hat{\beta}_1 S_{xy}$ οπότε το S^2 υπολογίζεται

υπολογίζοντας την οχ έμ

$$S^2 = \frac{S_y - \hat{\beta}_1 S_{xy}}{N-2}$$

Απόδειξη:

$$\sum \hat{u}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 \quad \underline{Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i} \quad \sum (\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 =$$

$$= \sum [-(\hat{\beta}_0 - \beta_0) - (\hat{\beta}_1 - \beta_1) X_i + u_i]^2 =$$

$$\left\| \begin{aligned} \hat{\beta}_0 - \beta_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} - \beta_0 = \beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{u} - \hat{\beta}_1 \bar{X} - \beta_0 \\ &= -(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \bar{X} + \bar{u} \end{aligned} \right.$$

$$= \sum [(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \bar{X} - \bar{u} - (\hat{\beta}_1 - \beta_1) X_i + u_i]^2 =$$

$$= \sum [-(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(X_i - \bar{X}) + (u_i - \bar{u})]^2 =$$

$$= \sum [(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 (X_i - \bar{X})^2 + (u_i - \bar{u})^2 - 2(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(X_i - \bar{X})(u_i - \bar{u})] =$$

$$= (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 S_{xx} + \sum (u_i - \bar{u})^2 - 2(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \sum (X_i - \bar{X})(u_i - \bar{u}) =$$

$$\left\| \begin{aligned} \sum (X_i - \bar{X})(u_i - \bar{u}) &= \sum (X_i - \bar{X}) u_i - \bar{u} \sum (X_i - \bar{X}) \\ &\stackrel{\text{(Από προηγούμενο)}}{=} (\hat{\beta}_1 - \beta_1) S_{xx} \end{aligned} \right.$$

$$= (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 S_{xx} + \sum (u_i - \bar{u})^2 - 2(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) S_{xx} =$$

$$= -(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 S_{xx} + \sum (u_i - \bar{u})^2$$

Άρα

$$E(\sum \hat{u}_i^2) = -E[(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 S_{xx}] + E[\sum (u_i - \bar{u})^2] =$$

$$= -S_{xx} \cdot \text{Var}(\hat{\beta}_1) + E[\sum (u_i - \bar{u})^2] =$$

$$= -S_{xx} \frac{\sigma^2}{S_{xx}} + E[\sum (u_i - \bar{u})^2] =$$

$$\bullet E[\sum (u_i - \bar{u})^2] = \sum E(u_i - \bar{u})^2$$

$$\begin{aligned} \bullet E(u_i - \bar{u})^2 &= E(u_i^2 + \bar{u}^2 - 2\bar{u}u_i) = E(u_i^2) + E(\bar{u})^2 - 2E(u_i\bar{u}) \\ &= \sigma^2 + \frac{E(u_1 + u_2 + \dots + u_N)^2}{N^2} - 2E(u_i \cdot \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_N}{N}) = \\ &= \sigma^2 + \frac{E(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_N^2 + 2\sum_{i < j} u_i u_j)}{N^2} - \frac{2(Eu_i u_1 + \dots + Eu_i^2 + \dots + Eu_i u_N)}{N} \\ &= \sigma^2 + \frac{\sum Eu_i^2 + 2\sum_{i < j} E(u_i u_j)}{N^2} - \frac{2Eu_i^2}{N} \quad (\text{αφού } Eu_i u_j = 0 \quad i \neq j) \\ &= \sigma^2 + \frac{\sum Eu_i^2}{N^2} - \frac{2\sigma^2}{N} = \sigma^2 + \frac{N\sigma^2}{N^2} - \frac{2\sigma^2}{N} = \\ &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned}$$

$$= -\sigma^2 + N\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N}\right) = -\sigma^2 + N\sigma^2 - \sigma^2 = (N-2)\sigma^2$$

Οπότε:

$$E(S^2) = \frac{E(\sum \hat{u}_i^2)}{N-2} = \frac{(N-2)\sigma^2}{N-2} = \sigma^2$$

Παράδειγμα Για την προσδιορισμό της σχέσης των παραγόμενων έργων Y ως συνάρτησης των εργασιών X εξετάσθηκε η συσχέτιση 10 έργων. Από την επεξεργασία των δεδομένων έχουμε:

$$\sum X = 80 \quad \sum Y = 96 \quad \sum X^2 = 668 \quad \sum Y^2 = 952 \quad \sum XY = 789$$

α) Να προσδιοριστούν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων οι συντελεστές $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ της ευθείας παλινδρόμησης

$$Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

αυτός και οι διασποράς των τιμών αυτών

β) Αξιόσημη των εργασιών κατά 2 τι μονάδες έχει το παραγόμενο έργο;

18) δ) Χρησιμοποιώντας τη γραμμική παλινδρόμηση τα πρώτα, α) θα πρέπει να ευρεθείτε την αίσθηση των ερευνών, να δε ελεγχθείτε αίσθηση 2 μονάδων στο παραπάνω έργο;

Απάντηση:

$$\alpha) \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{80}{10} = 8$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{96}{10} = 9,6$$

$$S_{xx} = \sum X^2 - N \bar{X}^2 = 668 - 10 \cdot 8^2 = 28$$

$$S_{xy} = \sum XY - N \bar{X} \cdot \bar{Y} = 789 - 10 \cdot 8 \cdot 9,6 = 21$$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{21}{28} = 0,75$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X} = 9,6 - 0,75 \cdot 8 = 3,6$$

Άρα η γραμμική παλινδρόμηση είναι:

$$Y = 3,6 + 0,75 \cdot X$$

Για να διακρίνουμε, των $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ έχουμε:

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}} \right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{10} + \frac{8^2}{28} \right) = 2,39 \sigma^2$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}} = \sigma^2 \frac{1}{28} = 0,036 \sigma^2$$

Την τιμή του σ^2 την ευρεθείτε με τη βοήθεια της πολλαπλής

$$S^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N-2} = \frac{S_{yy} - \hat{\beta} S_{xy}}{N-2}$$

$$S_{yy} = \sum Y^2 - N \bar{Y}^2 = 952 - 10 \cdot (9,6)^2 = 30,4$$

άρα

$$S^2 = \frac{30,4 - 0,75 \cdot 21}{8} = 1,83$$

$$\text{Επομένως } \text{Var}(\hat{\alpha}) = 1,83 \cdot 2,39 = 4,37$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = 1,83 \cdot 0,036 = 0,066$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X \\ Y' &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} (X+2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y' - Y = 2\hat{\beta} = 2 \cdot 0,75 = 1,5$$

Επομένως αύξηση στο X κατά 2 μονάδες οδηγεί στο Y (έργα) κατά 1,5 μονάδες

δ) Όχι, δε πρέπει να μετεκτιμάμε την γενική αξιολόγηση στο X από Y η οποία δε έχει τη σχέση

$$X = \hat{A} + \hat{B} Y$$

Η βέβαια περίπτωση όπου δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$ και να δούμε

$Y+2 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X'$ και να υπολογίσουμε στο X δε ήταν αν ανεξαρτησία προσδιορίσει R^2 ήταν μονάδα.

Στην περίπτωση που όπως έχουμε

$$R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} \cdot S_{yy}} = \frac{21^2}{28 \cdot 30,4} = 0,52 \neq 1$$

$$\text{λογικά όπως και } \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \cdot \frac{S_{xy}}{S_{yy}} = R^2 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{R^2}{\hat{\alpha}} = \frac{0,52}{0,75} = 0,69$$

Επομένως αύξηση στο Y κατά 2 μονάδες έχουμε στην n επί στο X αύξηση κατά

$$2\hat{\beta} = 2 \cdot 0,69 = 1,38$$

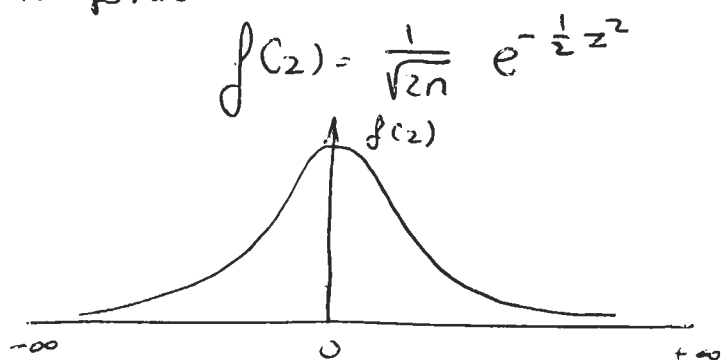
Κανονική Κατανομή

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{όπου } \mu \text{ η μέση τιμή και } \sigma \text{ η τυπική απόκλιση.}$$

Συμβολικά γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

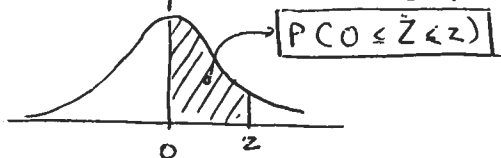
Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Η κατανομή Z είναι κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 γράφεται:



Στατιστικοί πίνακες δίνουν τις τιμές της πιθανότητας:

$$P(0 \leq Z \leq z) = \int_0^z f(z) dz$$



Παράδειγμα $P(0 \leq Z \leq 1,67) = 0,4525$ οπότε
 $P(Z \leq 1,67) = 0,5 + 0,4525 = 0,9525$

Κατανομή t (Student)

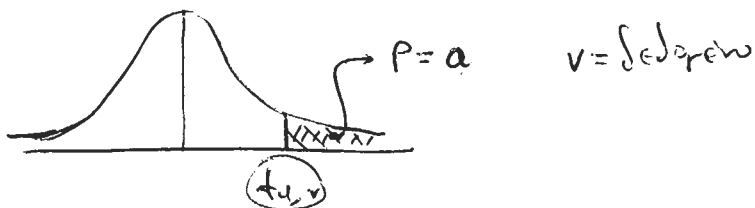
Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim N(0, 1)$ και Y ακολουθεί την κατανομή χ^2 με v βαθμούς ελευθερίας τότε η $t = \frac{X}{\sqrt{Y/v}}$ ακολουθεί την t με v βαθμούς ελευθερίας.

Η κατανομή t εξαρτάται από τους βαθμούς ελευθερίας v και είναι συμμετρική ως προς το $t=0$. Για $v > 30$ η κατανομή t προσεγγίζει την $N(0, 1)$.

Αν $\bar{X}$ είναι ο μέσος και s^2 η διακύμανση ενός τυχαίου δείγματος από ένα κανονικό πληθυσμό με μέσο μ και διακύμανση σ^2 τότε η $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την κατανομή t με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας $n = \text{πληθος δειγματος}$?

Στατιστικοί πίνακες δίνουν την τιμή της t για την οποία η πιθανότητα να υπερβηθεί από τη τιμή είναι α όπου α δεδομένη πιθανότητα.

$$\int_{t_{\alpha, v}}^{\infty} f(t) dt = \alpha$$



Πορεύουμε για $v=20$, $\alpha=0,05$ $t_{(0,05), 20} = 1,725$

Σημείωση: $t_{1-\alpha, v} = -t_{\alpha, v}$

➡ Διατήρηση Εμπιστοσύνης για τους συντελεστές β_0, β_1

Αν θεωρήσουμε ότι οι διασφαλιστικοί όροι μ_i μεταβάλλονται κανονικά και ανεξάρτητα με μέσο μ_0 και μ_1 και σταθερή διακύμανση σ^2 τότε έχουμε το υπόδειγμα της κλασικής θεωρίας γραμμικής παλινδρόμησης. Έχουμε δηλαδή

$$u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Τότε ισχύει

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \frac{\sum x_i^2}{N \cdot S_{xx}}\right) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sigma \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \cdot S_{xx}}}} \sim N(0, 1)$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \sigma^2 \frac{1}{S_{xx}}\right) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma / \sqrt{S_{xx}}} \sim N(0, 1)$$

Επειδή η διακύμανση σ^2 είναι άγνωστη την αντικαθιστούμε με τον αμερόσημο εκτιμητή της S^2 οπότε οι διασφαλιστικές των εκτιμητών δίνονται από τις σχέσεις

$$S_{\hat{\beta}_0}^2 = S^2 \frac{\sum x_i^2}{N \cdot S_{xx}}$$

$$S_{\hat{\beta}_1}^2 = S^2 \frac{1}{S_{xx}}$$

Τότε ισχύει:

$$\frac{\hat{\theta}_0 - \theta_0}{S_{\hat{\theta}_0}} \sim t_{(n-2)} \quad \frac{\hat{\theta}_1 - \theta_1}{S_{\hat{\theta}_1}} \sim t_{(n-2)}$$

Οπότε τα $100(1-\alpha)\%$ διαστήματα εμπιστοσύνης για τις ανεξάρτητες θ_0, θ_1 δίνονται από τις σχέσεις:

$$-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta}_0 - \theta_0}{S_{\hat{\theta}_0}} \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow \hat{\theta}_0 - t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\theta}_0} \leq \theta_0 \leq \hat{\theta}_0 + t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\theta}_0}$$

$$\text{οπότε} \Rightarrow \hat{\theta}_1 - t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\theta}_1} \leq \theta_1 \leq \hat{\theta}_1 + t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\theta}_1}$$

Εφαρμογή Στο παρακάτω με τις εφαρμογές και το παρακάτω έργο έχουμε:

$$N=10$$

$$\hat{\alpha} (= \hat{\theta}_0) = 3,6$$

$$\hat{\beta} (= \hat{\theta}_1) = 0,75$$

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = S_{\hat{\alpha}}^2 = 4,37 \Rightarrow S_{\hat{\alpha}} = \sqrt{4,37} = 2,09$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = S_{\hat{\beta}}^2 = 0,066 \Rightarrow S_{\hat{\beta}} = \sqrt{0,066} = 0,256$$

Για να βρούμε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης των παραμέτρων έχουμε $\alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025$ Από τους πίνακες βρίσκουμε

$$t_{(0,025),8} = 2,306 \text{ οπότε}$$

$$P(3,6 - 2,306 \cdot 2,09 \leq \alpha \leq 3,6 + 2,306 \cdot 2,09) = 0,95 \Rightarrow$$

$$P(-1,22 \leq \alpha \leq 8,42) = 0,95$$

$$P(0,75 - 2,306 \cdot 0,256 \leq \beta \leq 0,75 + 2,306 \cdot 0,256) = 0,95 \Rightarrow$$

$$P(0,16 \leq \beta \leq 1,34) = 0,95$$

Έλεγχος υποθέσεων.

Στην Οικονομετρία ενδιαφερόμαστε κυρίως να ελέγξουμε αν θεωρητικά υπάρχει σχέση μεταξύ της εξαρτημένης και της εξηγητικής μεταβλητής. Αν δε υπάρχει σχέση ανάμεσα στα X, Y τότε η γραμμή παλινδρόμησης θα είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα άρα $\beta_1 = 0$ και $R^2 = 0$

Υποθετούμε ότι:

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{S}_{\beta_0}} \sim t_{N-2} \quad \text{και} \quad \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{S}_{\beta_1}} \sim t_{N-2}$$

Οι πιο συνδυασμένοι έλεγχοι είναι της μορφής:

Υπόθεση μηδέν $H_0: \beta_1 = \text{τιμή} = c$ είναι της αυθαίρετης υπόθεσης $H_1: \beta_1 \neq \text{τιμή} = c$ ή $H_1: \beta_1 > \text{τιμή}$. Ο έλεγχος με τον οποίο ελέγχουμε αν αποδεχόμαστε ^{ή όχι} την H_0 με ένα επίπεδο σημαντικότητας α είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{aligned} H_0: \beta_1 = c & \quad \text{Η } H_0 \text{ απορρίπτεται αν} \\ H_1: \beta_1 \neq c & \quad \left| \frac{\hat{\beta}_1 - c}{\hat{S}_{\beta_1}} \right| > t_{N-2, \alpha/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0: \beta_1 = c & \quad \text{Η } H_0 \text{ απορρίπτεται αν} \\ H_1: \beta_1 > c & \quad \frac{\hat{\beta}_1 - c}{\hat{S}_{\beta_1}} > t_{N-2, \alpha} \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

Στο παρακάτω παράδειγμα με τις εξηγητικές έχουμε βρει:

$$\hat{\beta}_1 = 0,75 \quad \hat{S}_{\beta_1} = 0,256 \quad N=10$$

Έχουμε τον έλεγχο (για επίπεδο σημαντικότητας 5%)

24)

$$1/ H_0: \beta_1 = 0$$

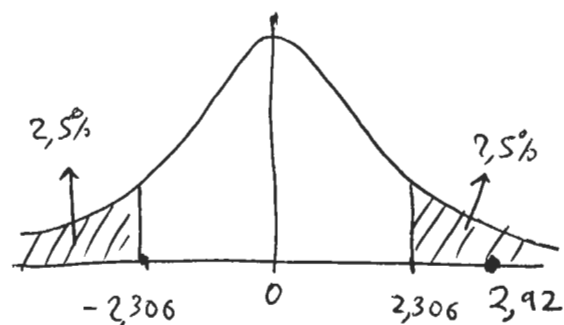
$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{S}_{\beta_1}} = \frac{0,75 - 0}{0,256} = 2,92$$

$$t_{8,(0,025)} = 2,306$$

H H_0 απορρίπτειται απ'αυτ'ο:

$$2,92 > 2,306$$



$$2/ H_0: \beta_1 = 0$$

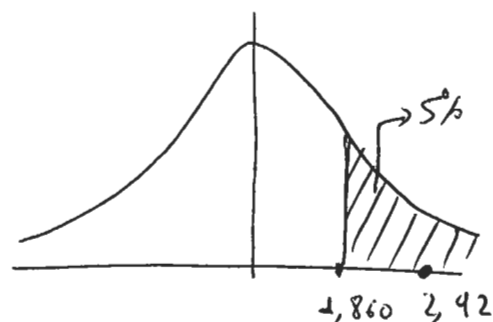
$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{S}_{\beta_1}} = \frac{0,70 - 0}{0,256} = 2,72$$

$$t_{8,(0,05)} = 1,860$$

H H_0 απορρίπτειται απ'αυτ'ο:

$$2,72 > 1,860$$



$$3/ H_0: \beta_1 = 1$$

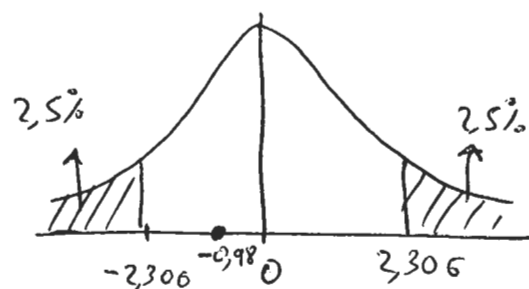
$$H_1: \beta_1 \neq 1$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{S}_{\beta_1}} = \frac{0,75 - 1}{0,256} = -0,98$$

$$t_{8,(0,025)} = 2,306$$

H H_0 δεν απορρίπτειται απ'αυτ'ο:

$$|-0,98| = 0,98 < 2,306$$



$$4/ H_0: \beta_1 = 1$$

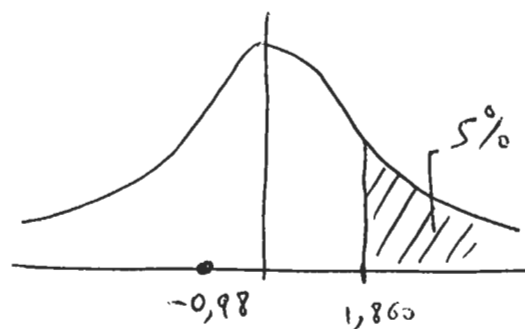
$$H_1: \beta_1 > 1$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{S}_{\beta_1}} = \frac{0,75 - 1}{0,256} = -0,98$$

$$t_{8,(0,05)} = 1,860$$

H H_0 δεν απορρίπτειται απ'αυτ'ο:

$$-0,98 < 1,860$$



Διάσπα Επισκόπηση για την προσδοκώμενη τιμή της Y_i

Η θεωρητική αναμενόμενη τιμή δίνεται ως

$$\hat{Y}_i = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 X_i$$

Είναι για ευρήματα της θεωρητικής αναμενόμενης των ημερών

$$E(Y_i) = \theta_0 + \theta_1 X_i$$

Λεπτομέρεια:

$$E(\hat{Y}_i) = E(\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 X_i) = E(\hat{\theta}_0) + E(\hat{\theta}_1) \cdot X_i = \theta_0 + \theta_1 X_i = E(Y_i)$$

έπεται ότι το $\hat{Y}_i$ είναι αφροδισμωτικό ευρήματος της $E(Y_i)$

Θεώρημα

Για τη διακύμανση του $\hat{Y}_i$ ισχύει:

$$\text{Var}(\hat{Y}_i) = \sigma_{\hat{Y}_i}^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{S_{xx}} \right]$$

Ανάλυση:

$$\text{Var}(\hat{Y}_i) = E[\hat{Y}_i - E(\hat{Y}_i)]^2 = E[\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 X_i - \theta_0 - \theta_1 X_i]^2 =$$

$$= E[(\hat{\theta}_0 - \theta_0) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1) X_i]^2 =$$

$$= E(\hat{\theta}_0 - \theta_0)^2 + X_i^2 E(\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 + 2X_i E\{(\hat{\theta}_0 - \theta_0)(\hat{\theta}_1 - \theta_1)\} =$$

$$= \text{Var}(\hat{\theta}_0) + X_i^2 \cdot \text{Var}(\hat{\theta}_1) + 2X_i \text{Cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) =$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{S_{xx}} \right) + \sigma^2 \frac{X_i^2}{S_{xx}} + 2X_i \left(-\sigma^2 \frac{\bar{X}}{S_{xx}} \right) =$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2 + X_i^2 - 2X_i \bar{X}}{S_{xx}} \right) = \sigma^2 \left[\frac{1}{N} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{S_{xx}} \right]$$

26)

Αν υποθέσουμε ότι

$$u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

τότε έχουμε

$$\frac{\hat{Y}_i - (\theta_0 + \theta_1 X_i)}{\sigma_{\hat{Y}_i}} \sim N(0, 1)$$

Αν την άγνωστη διακύμανση σ^2 που εμφανίζεται σαν υποδοχικό της $\text{Var}(Y_i)$ την εκτιμήσουμε από τα αμερόβητα εκτιμήματα της $S^2 = \frac{S_{yy} - \hat{\theta}_1 S_{xy}}{N-2}$ τότε έχουμε:

$$S_{\hat{Y}_i} = S \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{S_{xx}}}$$

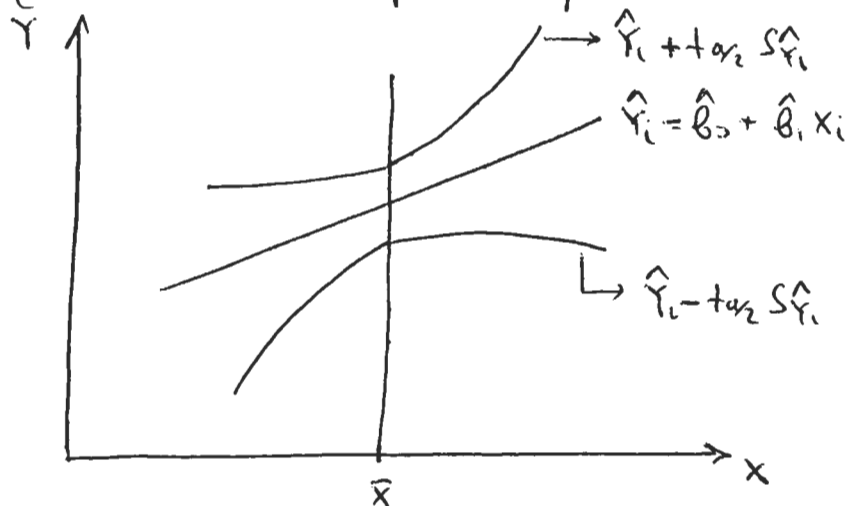
οπότε

$$\boxed{\frac{\hat{Y}_i - (\theta_0 + \theta_1 X_i)}{S_{\hat{Y}_i}} \sim t_{N-2}}$$

Οπότε (κάθε τα γινώδα) το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την προσδοκώμενη τιμή της Y είναι

$$\boxed{\hat{Y}_i - t_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{Y}_i} \leq E(Y_i) \leq \hat{Y}_i + t_{\alpha/2} S_{\hat{Y}_i}}$$

Αρα όσο απομακρύνεται η X_i από το μέσο $\bar{X}$ τόσο μεγαλύτερο είναι το τυπικό σφάλμα της $\hat{Y}_i$ και επομένως τόσο μεγαλύτερο το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης



Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Θεωρούμε το κλασικό κανονικό σταθμικό υπόδειγμα ότι:

$$Y_i = \theta_0 + \theta_1 X_i + u_i \quad \text{με} \quad u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

οπότε η συνάρτηση πιθανότητας του διακριτού ορατού είναι:

$$f(u_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{\sigma}\right)^2}$$

Τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των παρατηρήσεων είναι:

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_i)^2}$$

Αν η συνάρτηση αυτή θεωρηθεί ως συνάρτηση των παραμέτρων $\theta_0, \theta_1, \sigma^2$ ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας και συμβολίζεται με L .

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας έρχεται στην επιλογή των $\theta_0, \theta_1, \sigma^2$ που μεγιστοποιούν την L ή ισοδύναμα το λογάριθμο ως L .

$$\log L = -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{N}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \frac{\sum (Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_i)^2}{\sigma^2}$$

Αντι ψάχνουμε το μέγιστο του $\log L$ θα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \theta_0} &= \frac{\sum (Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_i)}{\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial \log L}{\partial \theta_1} &= \frac{\sum (Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_i) X_i}{\sigma^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sum (Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_i) &= 0 \quad (1) \\ \sum (Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_i) X_i &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\sum (Y_i - \theta_0 - \theta_1 X_i)^2}{(\sigma^2)^2} = 0 \quad (3)$$

Οι (1) και (2) οδηγούν στις ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΟΤΗΣΕΙΣ. Άρα οι εκτιμητές των θ_0, θ_1 που προκύπτουν από τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας είναι ιδιοί με αυτούς που προκύπτουν από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Αν την (3) μετασχημάτισε τον εκτιμητή $\tilde{\sigma}^2$ της διακύμανσης σ^2 :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum (Y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 X_i)^2}{N} = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N}$$

Σημειώστε ότι ο $\tilde{\sigma}^2$ ΔΕΝ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της διακύμανσης σ^2 (οπώς ο $S^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N-2}$ που χρησιμοποιούμε ως τώρα) αφού

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{E(\sum \hat{u}_i^2)}{N} = \frac{(N-2)\sigma^2}{N} \neq \sigma^2$$